UNIVERSIDAD DE ALCALA DE HENARES

FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES

INSTITUTO DE DIRECCION Y ORGANIZACION DE EMPRESAS

CATEDRA DE POLITICA ECONOMICA DE LA EMPRESA

PROF. DR. SANTIAGO GARCIA ECHEVARRIA

Working Papers nº 1.

Título: Análisis sobre la Programación Dinámica de la Producción. Método del cálculo de variaciones.

Autor: Dr. Antonio Sainz Fuertes.

Fecha: Enero 1982.

Working Papers nº 1.

Título: Análisis sobre la Programación Dinámica de la Producción. Método del cálculo de variaciones.

Autor: Dr. Antonio Sainz Fuertes.

Fecha: Enero 1982.

Universidad de Alcalá de Henares
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Instituto de Dirección y Organización de Empresas
Alcalá de Henares - Madrid

Working Papers nº 1.

Título: Análisis sobre la Programación Dinámica de la Producción. Método del cálculo de variaciones.

Autor: Dr. Antonio Sainz Fuertes.

Fecha: Enero 1982.

1. Introducción

Los elementos fundamentales de la programación dinámica existen, en origen, desde los tiempos de Pascal y Fermat, a mediados del siglo XVII, ya que el segundo fué el inventor del método de máximos y mínimos, y junto con el primero el padre de la "esperanza matemática.

Sin embargo, no deja de ser curioso, que haya sido necesario que transcurriera todo este tiempo, para que el método encontrase una expresión sistemática y de aplicación en la física y en la economía. Pero es necesario subrayar que el desarrollo sufrido, ha sido debido al matemático americano Richard Bellman, hará unos veinte años, al presentar uno de los caminos más eficaces cuando se pretende encontrar el óptimo de una función objetivo, asignada a un fenómeno económico (1).

La programación dinámica implica, pues, necesariamente el uso de las matemáticas, para poder llegar a formular las reglas referentes a la toma de decisiones, para una situación donde las decisiones tienen que hacerse, en varias fases de un proceso, y, donde las ya elegidas hasta una etapa determinada, restringen la elección de las posibles.

2. Formulación del problema

El problema que nos ocupa se refiere a la programación dinámica de la producción, el cual vamos a enfocar desde dos ángulos o posibilidades.

Primeramente analizaremos el caso en que es conocida la demanda y sus cambios en el tiempo, partiendo de la hipótesis de que es conocida con certeza, es decir, en condiciones de seguridad; para después analizar el mismo problema, cuando lo que conocemos de la demanda es su distribución de probabilidades, con lo cual nos situamos en un plano de condiciones de inseguridad o incertidumbre.

La formulación del problema podría presentarse como el intento de determinar la función del proceso temporal de producción, o lo que es lo mismo, un plan de producción de forma que mediante este plan lográramos que el coste total de producción y almacenamiento, en un cierto período fuera mínimo. Esta función podrá ser monótona creciente, decreciente, oscilante, etc.. Entre la infinita cantidad de funciones, escogeremos la óptima, que cumpla unas ciertas restricciones.

2.1. Conocida la demanda y sus variaciones con el tiempo: condiciones de certeza o seguridad.

Hemos dicho que el objetivo era encontrar un mínimo en un cierto período de programación por lo que vamos a darle una codificación a dicho período, que a partir de ahora le denominaremos θ, haciendo que su duración pueda ser desde uno a varios años.

De la forma que nos hemos planteado el problema debemos conocer la demanda en cada una de las variaciones con el tiempo t, que se produzcan en el período θ, a la cual la designaremos por $r(t)$ y por lo tanto $r(t) \geq 0$. Llamaremos función temporal de producción a una cierta función no negativa (la negatividad carente de sentido), $y(t)$, la cual nos determinará en cada instante del período θ nuestro nivel de producción.

Aunque no es necesario en el análisis que vamos a efectuar, partir de la hipótesis de que el stock constante de medios de producción no varía durante el período θ del plan, nosotros lo tomaremos como tal; si excluímos dicha hipótesis tendríamos que añadir los costes de inversiones al coste de producción, los cuales hacen cambiar el stock de medios de producción en la manera ya establecida por el propio plan.

Partiendo de que antes del período θ habría ya un stock acumulado, durante el período de tiempo θ, éste habrá sufrido un aumento o disminución, si la función del plan temporal de producción $y(t) > r(t)$, es decir, mayor que la demanda en "t" existirá un exceso de producción respecto a la demanda, la cual incrementará el stock ya existente en el momento "t" (4).

Si por el contrario, sucede que la función del plan temporal de producción es menor $y(t) < r(t)$ se producirá una disminución de existencias en la cantidad de $r(t) - y(t)$, en el momento "t", pudiendo llegar a ser las existencias en el momento "t" negativas. Ahora bien, para hacer más clara la exposición de nuestro análisis, aún no siendo necesaria, partiremos de la base de que las existencias no habrán de ser negativas.

Pasemos ahora a analizar cuales serán las funciones de la producción total, y de la demanda total del producto durante el tiempo comprendido entre el instante inicial "O" y el instante "t".

Si llamamos $R(t)$ a la demanda total del producto e $Y(t)$ a la producción total tendremos en tal caso que:

$$R(t) = \int_0^t r(t)\, dt \qquad (2.1.1.)$$

Así como:

$$Y(t) = \int_0^t y(t)\, dt \qquad (2.1.2.)$$

Para determinar la cantidad de existencias que notaremos por $S(t)$ en el instante "t".

Nos apoyaremos en nuestros datos, poniendo como existencias iniciales, o sea en "t=0", S(o), pudiendo escribir:

$$S(t) = Y(t) - R(t) + S(o) \geqslant 0 \qquad (2.1.3.)$$

Hagamos una representación de lo que sería, en nuestro caso; un aumento o disminución del stock durante el período de estudio "θ".

Primero representaremos la función de la demanda R(t) durante θ y luego la de producción Y(t) en el mismo período de tiempo, figura - 1, y figura - 2.

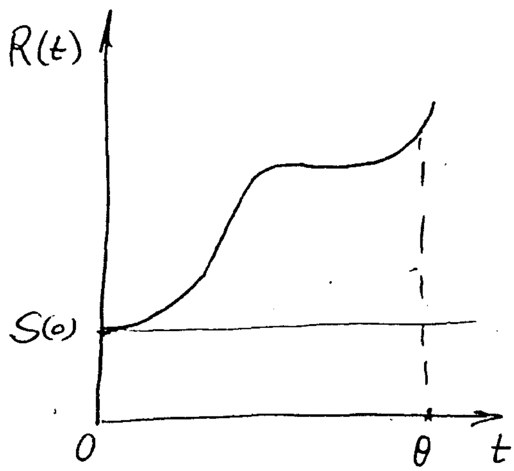

Figura - 1

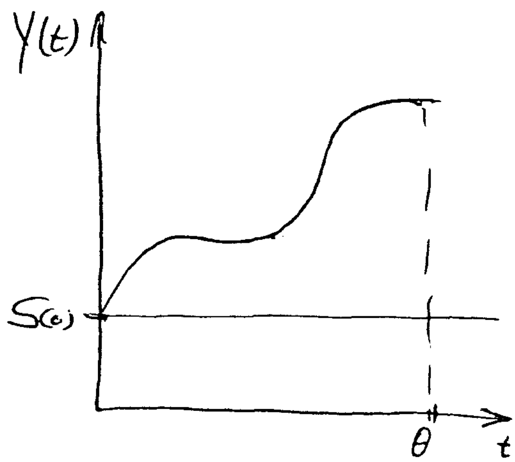

Figura - 2

Poniendo estas dos representaciones sobre unos ejes comunes, se tendrá la representación: (Figura - 3). (5).

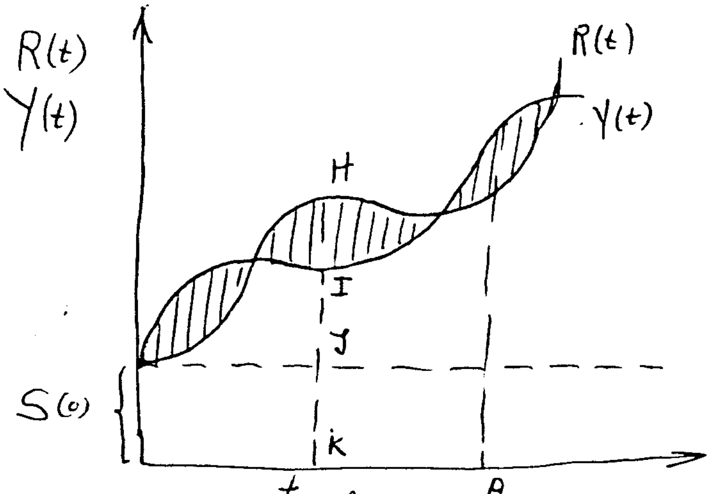

figura-3

Tal y como nos indica la expresión del stock (2.1.3.), en un momento "t", será igual a la diferencia entre la ordenada de la función de demanda R(t) y la ordenada de la función de producción Y(t) más las existencias iniciales en t=0, S(o).

Así pués, las variaciones que sufren las existencias vendrán determinadas por las diferencias entre las áreas, por debajo de la curva Y(t) y las áreas por debajo de la curba R(t) con lo cual como puede comprobarse en la figura 3, se obtendrán justo las áreas sombreadas. Por ejemplo en el momento "t", las existencias serían:

$$\overline{HK} - \overline{JK} + \overline{JK} = \overline{HI} + \overline{YK} \qquad (2.1.4.)$$

Planteándonos el problema en la forma que lo hemos hecho, nos falta tan solo por suponer, que el coste unitario de almacenamiento de las existencias por unidad de tiempo, tenga un cierto valor; al que llamaremos "q", así como en cada instante hay una función de coste de producción "Q(T), conocida la cual dependerá a su vez de la cantidad producida "Y(t)", por lo tanto podremos escribir:

$$Q(t) = f(y(t)) \qquad (2.1.5.)$$

Impongamos que el coste inicial de la producción es positivo y creciente, con lo cual sin duda, ha de cumplirse para ello que:

$$F'(y(t))>0 \quad y \quad f''(Y(t))>0 \qquad (2.1.6.)$$

Una vez que hemos expuesto nuestro planteamiento, como la razón del mismo, es encontrar que el coste total de almacenamiento durante el período "θ" sea mínimo, tendremos por una parte, que el coste total de la producción durante el periodo de tiempo que va de $0 \rightarrow \theta$, es:

$$\int_0^\theta f(Y(t)dt) \qquad (2.1.7.)$$

Por otra parte, las existencias totales en el mismo intervalo de tiempo vendrán multiplicadas por el coste unitario de almacenamiento, de las existencias por unidad de tiempo; y representarán el coste de almacenamiento del stock, durante el período "θ", por lo que se expresará como:

$$q\int_0^\theta (Y(t)-R(t)+S(o))dt \qquad (2.1.8.)$$

Teniendo en definitiva como coste total de producción y almacenamiento en "θ",la ecuación:

$$C=\int_0^\theta f(Y(t))dt+q\int_0^\theta (Y(t)-R(t)+S(o))dt \qquad (2.1.9.)$$

siendo lo que pretendemos conseguir que:

$$\underline{C=\text{Mínimo}}$$

Para poder conseguirlo, se cumplirán unas restricciones, que señalaremos a continuación.

a) El stock inicial será mayor o igual a cero, confirmándose así, el carácter no negativo de la existencia inicial.

b) La cantidad de existencias en un instante cualquiera, ha de ser mayor o igual a cero, lo cual refleja la imposibilidad de negatividad del stock en el intervalo comprendido entre $0 \leqslant t \leqslant \theta$, siendo además, esta retricción un reflejo también de la imposibilidad de compra por la empresa de producción ajena.

c) Que al final del período, es decir en el instante "O", el stock de productos terminados ha de ser S(o), o lo que es lo mismo, se ha de suponer conocida la cuantía final del stock, (lo cual es totalmente discreccional), pudiendo ser ésta igual a cero ó al stock inicial. Expresaremos esta restricción por:

$$Y(\theta) - R(\theta) = S(o) \qquad (2.1.10.)$$

Si nos fijamos en las restricciones b) y c) notaremos que gracias a ellas, quedan determinados los stock inicial y final del plan de producción lo cual nos es sumamente necesario.

2.2. Conocida la distribución de probabilidades de la demanda: condiciones de riesgo o seguridad.

Hemos analizado el problema de programación dinámica de la producción en el apartado anterior bajo las condiciones de certeza. Será en este apartado dónde nos ocuparemos de plantear el mismo problema de programación dinámica, en condiciones de inseguridad, es decir, introduciendo el factor riesgo (4).

Supongamos para ello, que la demanda total en el intervalo de tiempo de 0 a θ, es una variable aleatoria cuya distribución de probabilidades nos es conocida de antemano; tendremos en este caso, que la demanda total será:

$$R(t) = \int_0^{\theta} r(t)dt, \text{ conociendo } \quad (R(t)) \qquad (2.2.1)$$

La función Υ, es lo que llamamos función de densidad de probabilidades de la demanda total en el período de tiempo comprendido entre (0,t).

El planteamiento de este problema es igual al que hemos utilizado para el anterior. Así, pués, la producción total en el período ($0 \rightarrow \theta$) vendrá dada por:

$$Y(t) = \int_0^{\theta} y(t)dt \qquad (2.2.2)$$

La función de coste de producción de igual forma será f(y(t)), así como la existencia de un coste unitario de almacenamiento por unidad de tiempo "q_1". La única diferencia con el planteamiento en condiciones de certeza será que introduciremos aquí, un coste unitario "q_2", que será el coste por unidad que nos indicará la escasez ó déficit.

Tan sólo nos queda calcular el valor esperado ó esperanza matemática del coste total en un instante de tiempo "t".

El coste total en un momento "t", es como sabemos:

$$C(t) = f\left[y(t)\right] + q_1 \left[Y(t) - R(t) + S(o)\right] \qquad (2.2.3)$$

$$C(t) = f\left[y(t)\right] + q_2 \left[R(t) - Y(t) - S(o)\right] \qquad (2.2.4)$$

siendo el segundo miembro de la derecha de la ecuación anterior el coste producido, en las situaciones en que la demanda es superior a la suma de las existencias iniciales más la de producción.

La esperanza matemática del coste total en el momento "t", será:

$$EC(t) = f\left[y(t)\right] + q_1 \int_{-\infty}^{Y(t)+S(o)} \left[Y(t) - R(t) + S(o)\right] \Upsilon\left[R(t)\right] \; dR(t) + q_2 \int_{Y(t)+S(o)}^{+\infty} \left[R(t)-Y(t)-S(o)\right] \Upsilon\left[R(t)\right] \; dR(t) \qquad (2.2.5)$$

De esta última fórmula, se puede calcular el coste total expresado en el intervalo de tiempo comprendido entre $(0,\Theta)$.

El coste total esperado vendrá dado por:

$$C = E\int_{o}^{\Theta} C(t)dt \qquad (2.2.6)$$

o lo que es lo mismo:

$$C=\int_{o}^{\Theta}\left\{ f\left[Y(t)\right]+q_1\int_{-\infty}^{Y(t)+S(o)}\left[Y(t)-R(t)+S(o)\right]\Upsilon\left[R(t)\right] \; dR(t) + q_2\int_{Y(t)+S(o)}^{+\infty}\left[R(t)-Y(t)-S(o)\right]\Upsilon\left[R(t)\right] \; dR(t)\right\} dt \qquad (2.2.7)$$

Como salvedad, podemos indicar que los límites infinitos que intervienen en la fórmula (2.2.7) de las integrales, pudieran llegar a sustituirse por límites finitos para las situaciones en que hubiera unos valores máximos ó mínimos de la función de variable aleatoria R(t), es decir, de la función de la demanda.

Hemos visto, que el problema consiste en determinar una función de producción Y(t) de forma que el coste total esperado y determinado por la ecuación (2.2.7) sea mínimo al igual que el apartado anterior.

Cuando hayamos determinado la función de producción Y(t), la función óptima del plan de producción y(t), podrá ser a su vez determinada, ya que como se demostrará, esta función óptima del plan de producción vendrá determinada por

$$y(t) = Y'(t) \qquad (2.2.8)$$

3. El método del cálculo de variaciones: Su formulación.

El cálculo de variaciones (2) surgió en el siglo XVIII, para plantearse el problema de la determinación de funciones que satisfacieran condiciones extremas concretas. Uno de los problemas clásicos en Física, resuelto por el cálculo de variaciones es el determinar la línea de más rápida caída, llamada braquistócrona (3), es decir, la determinación de la curva que une dos puntos, a lo largo de la cual un punto material que se mueve bajo la acción de la gravedad cae en el mínimo tiempo posible.

Por tratarse de programación dinámica, creo necesario empezar, (antes de exponer la formalización matemática), diciendo qué se entiende por "movimiento de un sistema entre los tiempos "t_1 y t_2" . La configuración instantánea de un sistema está determinada por los valores de las "n" coordenadas generalizadas q_1 ...... q_n, y corresponde a un punto particular de un hiperespacio cartesiano en el que las q forman las n ejes coordenados. A este espacio, es al que se llamará espacio de configuración (3).

El estado del sistema variará con el tiempo y, el punto que lo representa describirá en el espacio de configuración una curva, llamada trayectoria del movimiento del sistema. Ahora bien, dejemos bien claro, que la expresión "movimiento del sistema", se refiere al movimiento del punto representativo a lo largo de esa trayectoria en el espacio de configuración, y conviene destacar que no existe necesariamente relación alguna entre el espacio de configuración y el espacio físico tridimensional; del mismo modo que las coordenadas generalizadas no son coordenadas de posición.

Cada uno de los puntos de la trayectoria del movimiento en el espacio de configuración, representa la configuración del sistema completo en un instante dado.

Para presentar el formalismo matemático del cálculo de variaciones, consideremos el problema en forma unidimensional; es decir, se desea hallar una función $Y(t)$ entre dos valores t_1 y t_2 tal que la integral curvilínea de cierta función

$F\left[Y(t), Y'(t), t\right]$, dónde $Y'(t) = dY/dt$, sea extremal.

Para la función correcta $Y(t)$, la integral ha de ser máxima o mínima.

$$\mathcal{J} = \int_{t1}^{t2} F\left[Y(t),\ y'(t),\ t\right] dt \qquad (3.1.)$$

Para ello haremos corresponder a cada una de las posibles curvas $y(t)$ un valor diferente de determinado parámetro "α", de modo que para ciertos valores de α, (ej: $\alpha = 0$), la curva coincida con la trayectoria o trayectorias que extreman la integral, por lo que Y será función de t y α.

Empleando cualquier representación geométrica, J será función de α :

$$J(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} F\left[Y(t,\alpha),\ Y'(t,\alpha),\ t\right] dt \qquad (3.2.)$$

y la condición para obtener un máximo o mínimo será la ordinaria:

$$\left[\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0} = 0 \qquad (3.3.)$$

Utilizando los métodos usuales de derivación bajo el signo integra, resulta que:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right\} dt \qquad (3.4.)$$

Consideremos la segunda de estas integrales:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial \alpha} dt \qquad (3.5.)$$

Si integramos por partes, la integral se convierte en:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial \alpha} dt = \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial \alpha}\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dt \qquad (3.6.)$$

Dado que todas las curvas en cuestión han de cumplir la condición de pasar por los puntos t_1 y t_2, es decir $Y(t) = Y(t_1)$ y $Y(t) = Y(t_2)$, la función $Y(t)$ no cambia y por lo tanto, $\partial y/\partial \alpha$ deberá ser nula en t_1 y t_2. Por ello, se anula el primer término de (3.6) y la ecuación se reduce a:

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} \, dt \tag{3.7}$$

Para obtener la condición de extremal multiplicaremos por la diferencial "$d\alpha$" y calcularemos las derivadas por $\alpha = 0$ resultando:

$$\left[\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \alpha}\right]_0 d\alpha = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y'} \right\} \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right) d\alpha \, dt \tag{3.8}$$

Llamaremos a $\left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\alpha}\right)_0 d\alpha = \delta \mathcal{J}$

Variación de $\mathcal{J}$. De modo análogo,

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_0 d\alpha &= \delta y \\ \left(\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right)_0 d\alpha &= \delta y' \end{aligned}\right\} \text{Variacion de } y \text{ y } y' \tag{3.9}$$

$\delta Y(t)$ Representa cierta variación arbitraria de $Y(t)$ obtenida por variación del parámetro α, en un entorno de su valor cero. Corresponde al desplazamiento virtual definido anteriormente.

Por supuesto, estos símbolos de variación pueden usarse desde el principio, pero conviene tener siempre presente, que se originan como abreviatura del procedimiento paramétrico esbozado.

Como $\delta Y(t)$ es arbitraria, se deduce que:

$$\delta J \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y'} \right\} \delta y \, dt = 0 \qquad (3.10)$$

únicamente si:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \qquad (3.11)$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo grado con derivadas parciales, que lleva por nombre "ecuación diferencial de EULER",en recuerdo de su descubridor, por el año 1744. Resolviendo la ecuación de EULER (3.11) obtendremos la función que buscamos Y(t) la cual minimice el valor de la integral J.

4. Aplicación del método a la producción dinámica de la producción (5).

4.1. Aplicado al apartado 2.1.

Deducimos que cuando la demanda era conocida, así como, sus variaciones en el tiempo, obtendríamos una función que habría que minimizar. Dicha función era: (fórmula 2.1.9)

$$C = \int_0^{\theta} f\left[Y(t)\right] dt + q \int_0^{\theta} \left[Y(t) - R(t) + S(o)\right] dt = \text{Mínimo} \qquad (4.1.1.)$$

Como la demanda es conocida y no cambia se tiene que:

$$Y(t) = \int_0^{\theta} y(t) \, dt;$$

como ademas, S(o) sabemos que es constante:

$$y(t) = Y(t)$$

Por otra parte el stock inicial S(o) es consta nte por lo que a la función F puede ser tomada, todo aquello que está bajo el signo de integral.

$$C = \int_0^{\theta} F\left[Y, Y', t\right] dt = \text{Mínimo}$$

Expresión que podemos escribir basándonos en el teorema del cálculo de variaciones, si se cumple como dijimos, la que llamamos ecuación diferencial de EULER.

En nuestro caso:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = K \quad ; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{d}{dt} f'(y') \qquad (4.1.4)$$

Con lo que la ecuación diferencial de EULER toma la forma:

$$K - \frac{d}{dt} \quad f'\left[Y(t)\right] = 0 \qquad (4.1.5)$$

por lo que:

$$K = f''\left[(y(t)\right] \; y'(t) \qquad (4.1.6)$$

Vemos que $f'\left[(y(t)\right]$ representa el coste marginal de la producción:

$f''\left[y(t)\right] \; y'(t)$, nos indica el incremento del coste marginal resultante del cambio del plan de producción.

De la forma que hemos resuelto nuestro problema para que el coste total sea mínimo, este incremento del coste marginal resultante, ha de ser igual al coste de almacenamiento, encontrándonos en la situación óptima.

Analicemos qué pasa si este incremento del coste marginal resultante del cambio de la producción es mayor que "k", es decir, $K < f''$. Por ser menor lo aconsejable es almacenar el stock ocasionado sin cambiar la producción. Por otra parte, si es mayor K, $K > f''$, debemos cambiar el plan de producción.

El camino seguido para el estudio de existencias de un máximo (ó mínimo), de una función, es igual al que hay que seguir para demostrar y buscar la existencia de un máximo (ó un mínimo), de la funcional en el cálculo de variación. Teniendo esto en cuenta debemos demostrar que el valor de

$$K = f''[y(t)]\; y'(t)$$

necesario para que exista un extremo de la función del coste "C" es un mínimo de dicho coste.

Para determinar la existencia de un máximo o de un mínimo de la funcional en el cálculo de variación, habrá como señalaba antes, que, calcular la variación segunda:

$$\delta^2 J = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \delta y \delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \delta y'^2 \right) dt \qquad (4.1.7)$$

Veamos que sucede en general:

Si $\delta^2 J < 0$ la funcional tiene un máximo. Si $\delta^2 J > 0$ enton- entonces nos encontramos con un mínimo.

Hecha esta aclaración que considerabamos necesaria, estudiemos nuestro caso concreto. Nosotros tenemos el valor de la funcional, C.

$$C = \int_0^{\theta} f[y(t)]\,dt + q \int_0^{\theta} [y(t) - R(t) + S(0)]\,dt = \text{mínimo} \qquad (4.1.8)$$

por lo que la variación segunda de esta función será:

$$\delta^2 C = \int_0^{\theta} \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \, \delta y^2 \, dt \qquad (4.1.9)$$

así pues $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial y'} = 0$

y que como ya dijimos pero no demostramos, que: $Y'(t) = y(t)$, ver fórmula (2.2.8).

Para terminar tenemos como resultado que:

$$\delta^2 C = \int_0^{\theta} f''[y'(t)] \, \delta y^2 = \int_0^{\theta} f''[y(t)] \, \delta y^2 \, dt \qquad (4.1.10)$$

Recordamos ahora que pusimos como condición, al empezar, que el coste marginal de producción $f'(y)$ era creciente, esto nos significa que $f''(y) > 0$, con lo cual la variación segunda $\delta^2 C > 0$.

Nótese siempre que se cumple que $K = f''[y(t)] \, y'(t)$, el coste total de producción y de almacenamiento "C" es mínimo.

4.2. Aplicación del apartado 2.2.

Al igual que hicimos en el apartado 4.1., aquí aplicaremos el método del cálculo de variaciones para analizar el problema de programación dinámica de la producción, en condiciones de inseguridad o incertidumbre (5).

Partiermos de la fórmula ya obtenida (2.2.7) la cual venía expresada por:

$$C = \int_0^{\theta} \Big\{ f[y(t)] + q_1 \int_{-\infty}^{y(t)+S(0)} [Y(t) - R(t) + S(0)] \, \varphi[R(t)] \, dR(t)$$
$$+ q_2 \int_{Y(t)+S(0)}^{+\infty} [R(t) - Y(t) - S(0)] \, \varphi[R(t)] \, dR(t) \Big\} \, dt$$

(4.2.1)

Si nos fijamos en la expresión del coste total esperado, se puede observar que la integral del segundo miembro, es precisamente de la misma clase que la de la fórmula (3.1), por lo que dicha funcional alcanzará el mínimo, siempre que se cumpla la ecuación de Euler, demostrada en su momento, (fórmula 3.11). Dicha ecuación, será la que tengamos que resolver, ahora bien, en el análisis de nuestro problema, nos encontramos con la necesidad de calcular una derivada bajo signo de integral, y cuyos límites de integración dependen de la variable "t" (6).

Con lo que obtenemos:

$$q_1 \int_{-\infty}^{Y(t)+S(o)} \psi\left[R(t)\right] dR(t) \quad - \quad q_2 \int_{Y(t)+S(o)}^{+\infty} \psi\left[R(t)\right] dR(t)$$

como resultado del primer miembro de la ecuación de Euler $\partial F/\partial Y$.

Como en el segundo miembro de la ecuación de Euler. habíamos encontrado la expresión (4.1.6),es decir: $f''\left[y(t)\right]y'(t)$, ésta toma la forma siguiente:

$$f''\left[y(t)\right] y'(t) = q_1 \int_{-\infty}^{Y(t)+S(o)} \psi\left[R(t)\right] dR(t) - q_2 \int_{Y(t)+S(o)}^{+\infty} \psi\left[R(t)\right] dR(t) \qquad (4.2.3)$$

Será esta ecuación la que tendremos que resolver para obtener la función óptima Y(t), es decir la cantidad producida o producción total de forma que luego pasemos al cálculo de la función del proceso temporal de producción. $y(t) = Y'(t)$.

Analicemos la ecuación (4.2.3), en ella vemos que la primer a integral del segundo miembro, nos expresa la probabilidad de que la demanda durante el período de tiempo en estudio sea inferior a la suma de la producción y stock inicial, así como, la segunda integral expresa la probabilidad de que la demanda en el período sobrepase la cantidad Y(t) + S(o), ó lo que es lo mismo, que se produzca un déficit.

De aquí vemos, que el segundo miembro de la ecuación (4.2.3), es precisamente el coste total esperado de almacenamiento y déficit, y que además la suma de las dos probabilidades (suma de las dos integrales) es igual a la unidad.

Basándonos en la propiedad de que $P_1 + P_2 = 1$, suma de probabilidades igual a la unidad, nada hay que nos impida expresar $P_1 = 1 - P_2$, llamando (7):

$$\int_{Y(t)+S(o)}^{\infty} f\left[R(t)\right]dR(t) = P\left[Y(t)+S(o)\right] \qquad (4.2.4)$$

tendremos:

$$\int_{-\infty}^{Y(t)+S(o)} f\left[R(t)\right]dR(t) = 1-P\left[Y(t)+S(o)\right] \qquad (4.2.5)$$

luego podremos escribir la ecuación (4.2.3) de la forma

$$f''\left[y(t)\right]\, y'(t) = q_1\left\{1 - P\left[Y(t)+S(o)\right]\right\} - Q_2 P\left[Y(T)+S(o)\right] \qquad (4.2.6)$$

Si tomamos factor común, $P\left[Y(t) + S(o)\right]$ y lo despejamos de la última ecuación nos queda:

$$P\left[Y(t) + S(o)\right] = \frac{q_1 - f''\left[y(t)\right]\, y'(t)}{q_1 + q_2}$$

Con lo que obtenemos mediante esta última fórmula, el coeficiente de riesgo de que el stock resulte insuficiente, que será además el óptimo. Se observará que la existencia de la expresión $f''[y(t)]\, y'(t)$ da lugar a un achatamiento en el proceso de producción, conduciéndonos a un mayor almacenamiento de existencias, ya que es preferible, cuando se produzcan variaciones en la demanda, resolver la situación, mediante una variación de almacenamiento que mediante la opción de tomar como solución una variación de la producción.

5. Análisis y resolución práctica de un caso

Para no hacer de este trabajo una exposición puramente teórica, en este apartado incluimos, un caso muy sencillo que quizas ayude a aclarar algunos puntos expuestos anteriormente.

Si tomamos para nuestro ejemplo, y como punto de partida una función de coste de producción representada por un polinomio de segundo grado y con el fin de no complicar la explicación del mismo, tendremos:

$$f(y) = a + by + cy^2 \tag{5.1}$$

siendo $a \geqslant 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Es fácil apreciar que la función de coste de producción elegida representa una parábola, que en el caso de producción nula, es decir y=0, dicha función se hace igual a una constante, y teniendo en cuenta la ecuación (5.1), se obtiene que: $f(0)=a$.

Teniendo en cuenta ahora, la ecuación (3.11), vemos que toma el valor de $k= 2cy(t)$, por lo que, $y'(t)=k/2c$ con lo cual el cálculo de y(t), es inmediato, siendo $y(t)=\frac{k}{2c}\ t + q$ donde q es una constante, que dependerá de las condiciones iniciales y finales, es decir, de $S(o)\quad 0$, y $y(\theta) - R(\theta) = S(\theta)$.

Como se ha visto, en nuestro caso la función del plan de producción es una función lineal. Siguiendo nuestro análisis por los mismos pasos dados en el apartado 2.1, calcularemos la cantidad producida durante el periodo de tiempo comprendido entre (0,t), así pues:

$$Y(t) = \int_0^t \left(\frac{K}{2c}\ t + q\right) dt = \frac{K}{4c}\ t^2 + qt + n$$

siendo n= constante.

Si hacemos un análisis de la solución observamos que de la ecuación de Euler obtuvimos la curva de producción, $y(t)= \frac{k}{2c} t + q$, cuya pendiente es $k/2c > 0$, la cual corta al eje de ordenadas por el punto, para $t=0$, en $y(o)=q$.

Si en el momento inicial tenemos un stock de valor $S(o)=0$, en un intervalo de tiempo (o,t_1), la producción ha de ser superior a la demanda, luego $y(t) > r(t)$, por lo que en dicho intervalo de tiempo se esta creando un stock que como ya se indicó en 2.1, corresponderá al área rayada entre la recta de producción $y(t)$ y la curva de demanda $r(t)$, figura 4.

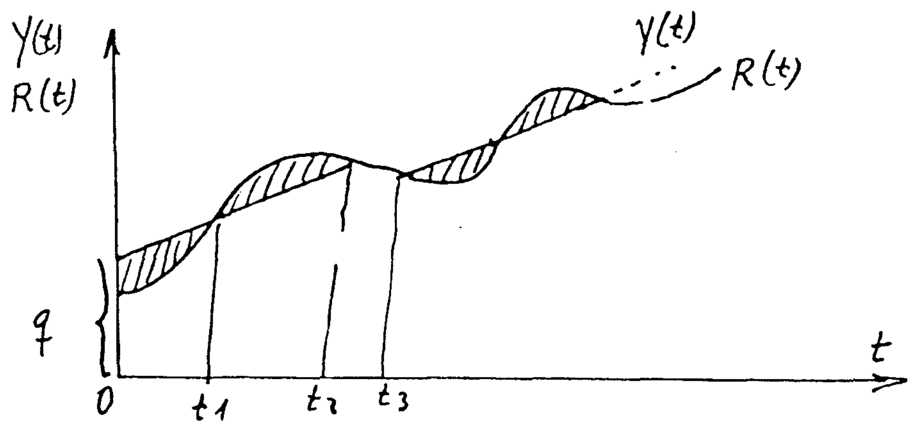

FIGURA 4

En un período de tiempo siguiente (t_1,t_2), se tiene que $y(t) < r(t)$, lo que nos indica que las existencias se han agotado. Ahora bien, como no es posible dar más de lo que uno tiene, es decir, de lo acumulado en el periodo anterior, las áreas correspondientes a los dos períodos indicados, han de ser iguales o la comprendida en (t_1,t_2) nunca mayor que la comprendida en (o,t_1).

En la figura, puede verse que durante el periodo (t_2,t_3) el nivel de producción y(t) se superpone a la demanda r(t). Como resultado se obtiene que la línea que representa el proceso de producción es mucho más achatada que la que representa la demanda, siendo en definitiva una serie de partes de recta y de algunas zonas en que la producción y demanda se hacen iguales, es decir, y(t)=r(t).

B I B L I O G R A F I A

OBRAS CITADAS Y SUPLEMENTARIAS:

(1) -R. Bellman. "The Theory of Dynamic Programing", Bull, Aner, Math. Soc., 60, pags, 503-515, 1954.

-R. Bellman: "Dynamic Programing", Princeton Univ. Press, N.J. 1957.

-R. Bellman et S. Dreyfus. "Applied Dynamic Programing", Princeton Univ. Press, 1962.

-R. Bellman. "On The Theory of Dinamic Programing", Procedings Nat. Acad. Scieness U.S.A., 38,8, pags, 716-19. Agosto 1952.

-Leandro CANIBANO CALVO, "Las decisiones secuenciales en la empresa". Aplicaciones de la programación dinámica a los sistemas de gestión. Tesis doctoral, curso 1970-1971. Universidad de Madrid.

(2) -Elis G.A. "Calculus of Variations" (Carus Mathematical Monographs.1) La Salle, Illinois, Open Court Publishing Co. 1925 (II).

-NewBoult H.O. "Analytical Methods in Dynamics". Oxford, Oxford University Press.

-Olson, Harry F. "Dynamical Analogics". Nueva York, D. Vannostrand.

-Kasner, Edward. "Differential - Geometric Aspects of Dynamics". Nueva York, American Mathematical Society.

(3) -Lanczos, Cornelius. "The Variational Principles of Mechanics" University of Toronto Press. Toronto.

(4) -Churchman, Ackoff, Arnoff. "Introducción a la Investigación Operativa". Ed. Aguilar, 1971.

-Ira Horowitz. "Análisis Cuantitativo de los Negocios. Investigación Operativa". Ediciones del Castillo, S.A. Madrid 1968.

-A. Kaufman y R. Cruon. "La programación dinámica". 2ª Impresión, C.E.C.A. Madrid 1969.

-Martin K. Starr. "Systems Management of Operations". Prentice Hall, Inc. Columbia University, 1971.

(5) -James H. Greene. "Production Control: Systems and Decisions". Homewood, III. Richard D. Irwin, Inc. 1965.

-Arrow, Kenneth Joseph, Scard, Herbert. "Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production". Stanford University Press, 1958.

(6) - J. F. Magee. "Production Planning and Inventory Control". Nueva York, 1958.

-Lange, O. "Teoría General de la Programación". Ed. Ariel, 1971.

-Lesourne, J. "Técnica Económica y Gestión Industrial". Aguilar, Madrid 1964.

-Morse, P.M. Ques. "Inventories and Maintainance". Nueva York, 1958.

(7) -R.San Juan. "Análisis matemático". Capítulo II, apartado 151, pags, 209-291. Madrid 1961.

-Laplace, J. "Theorie Analytique des probabilities". Paris, 1812.

-A. M. Bonett, F. J. Jauffred. "Elementos de Probabilidad y Estadística". Representaciones y Servicios de Ingenieria, S.A. Mexico 1969.